Literatur

B. Elpelt und J. Hartung
Grundkurs Statistik
Oldenbourg Verlag

B. Leiner
Einführung in die Statistik
Oldenbourg Verlag

W. Oberhofer
Wahrscheinlichkeitstheorie
Oldenbourg Verlag

Etwas mathematischer orientiert:

K. Krickeberg und H. Ziezold
Stochastische Methoden
Springer Verlag

J. Pfanzagl
Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie
de Gruyter

$\Omega \ldots$	Stichprobenraum, Ereignisraum, Meßraum (*sample space, measurable space*)
$A, B, C, \ldots$	Ereignisse (*events*) (=Teilmengen von Ω)

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß (*probability measure*) ordnet Ereignissen (Mengen) Zahlenwerte zu, die den Grad der Sicherheit des Eintrittes des Ereignisses angeben.

Festsetzung:

0	bedeutet	unwahrscheinlich
1	bedeutet	sicher

Sei $\mathcal{A} = \{A, B, \ldots\}$ ein Mengensystem (von Ereignissen) mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$

(iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Beachte:
$\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{A}, \quad A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$

Definition:
Eine reelle Funktion P definiert auf $\mathcal{A}$ heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß** oder kurz Wahrscheinlichkeit (*probability*), falls folgendes gilt:

(i) $0 \leq P(A) \leq 1, \quad A \in \mathcal{A}$

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad$ falls $\quad A \cap B = \emptyset, A, B \in \mathcal{A}$
(“Additivitätseigenschaft”)

Achtung: Man verwechsle **nicht**

Unabhängigkeit   mit   Disjunktheit!!!

A, B unabhängig $\Rightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

A, B disjunkt $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$ $\Rightarrow$ $P(A \cap B) = 0$

A, B unabhängig <u>und</u> disjunkt $\Rightarrow$ $P(A) = 0$ oder $P(B) = 0$.

Man sieht den Unterschied z.B. bei der Wahrscheinlichkeit von Vereinigungen $A \cup B$:

Falls A, B unabhängig:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

Falls A, B disjunkt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

A und B disjunkt $\not\Rightarrow$ A und B unabhängig
Beispiel: Würfelwurf (Laplace-Modell)
A..."gerade Zahl", $P(A) = 1/2$, B..."ungerade Zahl", $P(B) = 1/2$
$A \cap B = \emptyset$, $P(A \cap B) = 0 \neq 1/4 = P(A) \cdot P(B)$

A und B unabhängig $\not\Rightarrow$ A und B disjunkt
Beispiel: Würfelwurf (Laplace-Modell)
A... "gerade Zahl", $P(A) = 1/2$, B..."Zahl ≤ 2", $P(B) = 1/3$
$P(A \cap B) = 1/6 = P(A) \cdot P(B)$

Ferner: Es gelte $A \subset B$. Dann

$$A \text{ und } B \text{ unabhängig} \Leftrightarrow P(A) = 0 \text{ oder } P(B) = 1$$

Beispiel:
n Personen sind zu einer Party eingeladen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, daß 2 am gleichen Tag Geburtstag haben?
Berechne die Komplementärwahrscheinlichkeit $1-p$!!!
$P_1, \ldots, P_n$ Personen
A_i... Ereignis, daß $(i+1)$-te Person kein Geburtstag mit $P_1, \ldots, P_i$ hat, $i = 1, \ldots, n-1$
$\Rightarrow \quad P(A_1) = \frac{364}{365}$, $P(A_2|A_1) = \frac{363}{365}$,..., $P(A_{n-1}|A_1, \ldots, A_{n-2}) = \frac{365-n+1}{365}$
Also:

$$\begin{aligned}
1-p &= P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \\
&= 1 - P(A_1) \cdot \prod_{i=2}^{n-1} P(A_i|A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1}) \\
&= 1 - \frac{365 \cdot 364 \ldots \cdot (365-n+1)}{365^n} \\
&= 1 - \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{365-i}{365}\right) \\
&= 1 - \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{365}\right) \\
&= 1 - \exp\left(\sum_{i=0}^{n-1} \log\left(1 - \frac{i}{365}\right)\right) \\
&\sim 1 - \exp\left(-\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{365}\right) \\
&= 1 - \exp\left(-\frac{(n-1)n}{2 \cdot 365}\right)
\end{aligned}$$

n	exakter Wert	approximativer Wert
10	0.117	0.116
23	0.507	0.49999
80	0.99991	0.99991

Modelle für ganzzahlige Zufallsvariable

Sei $X : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ eine ganzzahlige Zufallsvariable (*integer random variable*)

$$P(X = i) := P(X \in \{i\}) =: p_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Wahrscheinlichkeit, daß X den Wert i annimmt

Werte von X	Wahrscheinlichkeiten
0	p_0
1	p_1
2	p_2
$\vdots$	$\vdots$

Die Folge der Wahrscheinlichkeitswerte (p_i) heißt **Verteilung** (*distribution*) von X. Beachte, daß

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1.$$

allgemein:

$$P(X \in A) = \sum_{i \in A} P(X = i) = \sum_{i \in A} p_i, \quad A \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Definition. $X : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, $Y : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{0\}$.
X und Y heißen **unabhängig**, falls

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B), \quad A, B \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Definition. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Funktion. Dann ist der Erwartungswert der Komposition $g \circ X$ gegeben durch

$$E(g(X)) := \sum_{i=0}^{\infty} g(i) \cdot p_i$$

Beispiele:
(i) momenterzeugende Funktion: $g(x) = u^x$

$$G_X(u) := \sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot u^i = E(u^X)$$

(ii) Momente: $g(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$

$$E(g(X)) = E(X^m) = \sum_{i=0}^{\infty} i^m \cdot p_i$$

(iii) Varianz: $g(x) = (x - E(X))^2$

$$E(g(X)) = E((X - E(X))^2) = Var(X)$$

3.1.1 Bernoulli-Verteilung

X hat nur 2 Werte: 0 (entspricht Mißerfolg), 1 (entspricht Erfolg)

$$\begin{aligned} P(X=0) &= 1-p \\ P(X=1) &= \quad p \end{aligned}$$

Symbol: $X \sim$ Bernoulli (p), $p \in [0,1]$

$E(X) = p$

$G_X(u) = 1 - p + p \cdot u$

$\mathrm{Var}(X) = p^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p)[p + (1-p)] = p(1-p)$

Beispiel: Einmaliger Wurf einer fairen Münze $(p = 1/2)$
(Kopf=Erfolg=1, Wappen=Mißerfolg=0)

Beispiel: n–facher unabhängiger Wurf einer fairen Münze ($p = 1/2$)
(Kopf=Erfolg=1, Wappen=Mißerfolg=0)
E_j... Kopf beim j-ten Wurf

Bemerkung: Bernoulli (p)=$B(1, p)$.

Satz. Es seien X_1 und X_2 unabhängige und $B(1, p)$ verteilte Zufallsvariable. Dann gilt:

$$X_1 + X_2 \sim B(2, p)$$

Allgemeiner: Sind X_i, $i = 1, \ldots, n$, unabhängige $B(1, p)$ verteilte Zufallsvariable, so gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$$

Beispiel: n-facher unabhängiger Wurf einer fairen Münze ($p = 1/2$)
(Kopf=Erfolg=1, Wappen=Mißerfolg=0)
X_i i-te Wurf, $X_i = 1$, falls Kopf, $X_i = 0$, falls Wappen
$X := \sum_{i=1}^{n} X_i$ = Anzahl der Erfolge $\sim B(n, 1/2)$